# 自由落下衝撃の運動量と力積

質量 m、速度 V の物体に力 F が微小時間 t 作用して、速度が V'に変化する場合、運動量の変化は力積 Ft になります（運動量保存）。

$$mV - mV' = -F \times t \qquad (1)$$

力 F が時間と共に変化する場合 F(t)として、これが時間 T 作用して物体の速度が $V_0$ から V ‘に変化する場合には(1)式は(2)式になります。つまり時間 T の間の力積の総和が運動量変化になります。

$$mV_0 - mV' = -\int_0^T F(t)dt \qquad (2)$$

自由落下の衝撃を考えると、質量 m の球をある高さ $h_0$ から落下せると、速度 $V_0$ で床に衝突し、床と球と間で力 F(t)がある時間 T 作用して、最終的に $V_1$ の速度で跳ね返っていきます。

$$mV_0 - mV_1 = -\int_0^T F(t)dt \qquad (3)$$

高さ $h_0$ から自由落下させて、床に当たり跳ね返った後の到達高さを $h_1$ とすると、反発係数 e は次式になります。

$$e = \frac{-V_1}{V_0} = \frac{\sqrt{2gh_1}}{\sqrt{2gh_0}} = \sqrt{\frac{h_1}{h_0}} \qquad (4)$$

完全弾性衝突では e=1、非弾性衝突では１＞e＞０、全く跳ね返らない場合は e=0 です。

跳ね返り率と反発係数の例を下の表に示します。

| 跳返り率 $h_1/h_0$ | 1.00 | 0.75 | 0.50 | 0.25 | 0.00 |
|---|---|---|---|---|---|
| 反発係数 e | 1.00 | 0.87 | 0.71 | 0.50 | 0.00 |

床の圧縮力を正とし、反発係数 e を用いると(3)式は(5)式になります。

$$mV_0(1+e) = \int_0^t F(t)dt \qquad (5)$$

# 跳ね返り率が変化したときの衝撃力

(5)式を用いて自由落下の衝撃力と運動量の関係を具体的に説明すると次のようです。

①「完全に元の高さまで跳ね返る」(e=1 で $h_1$=$h_0$)の場合には、(5)式より力積の総和が落下運動量の２倍になる。

$$\int_0^t F(t)dt = 2mV_0 \qquad (6)$$

②「半分の高さまで跳ね返る」((h₁=h₀/2 で e=0.707)の場合には(5)式より力積の総和が落下運動量の 1.707 倍になる。

$$\int_0^t F(t)dt = 1.707 \times mV_0 \qquad (7)$$

③「全く跳ね返らない」(($h_1$=02 で e=0)の場合には(5)式より力積の総和が落下運動量と等しくなる。

$$\int_0^t F(t)dt = mV_0 \qquad (8)$$

## 反発係数 e が零に近い例

右の写真と表１は、変動荷重検出板に 0.5kg 又は 1kg の粘土玉を h=1m 高さから落下させた結果です。図１はその衝撃力の波形です(赤線：1kg, 黒線：0.5kg)。玉はほとんど跳ね返りません。

粘土玉の衝突時の理論的運動量は m $V_0$ で表中の値になります。表１の力積の総和は、衝撃力の波形 F(t)を(9)式に従って積分したものです（F(t)と時間の面積）。

$$\text{力積の総和} = \int_0^t F(t)dt \qquad (9)$$

力積の総和は理論的運動量 m$V_0$ よりも１割程度大きくなっていますが、ほぼ(8)式の関係（運動量＝力積の総和）になっています。

表１　粘土玉の自由落下実験の結果

| 粘土の重さ | 0.5kg | 1kg |
|---|---|---|
| ピーク衝撃力 (N) | 537 | 793 |
| 衝撃持続時間 (msec) | 8.2 | 11.2 |
| 理論的運動量 m$V_0$ (N･sec) | 2.21 | 4.43 |
| 力積の総和 (N･sec) | 2.5 | 5.1 |

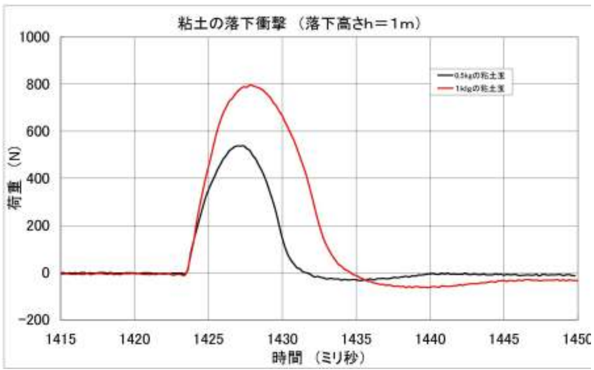

図１　粘土玉の衝撃力の波形

なお、粘土玉は大きい方が衝撃力の持続時間が長くなります。

## 反発係数 e が１に近い例

次に m=6.9kg のボーリング球を変動荷重検出板に自由落下させたときの衝撃力波形例を図２に示します。ボーリング球は金属板に当たると良く跳ね返ります。

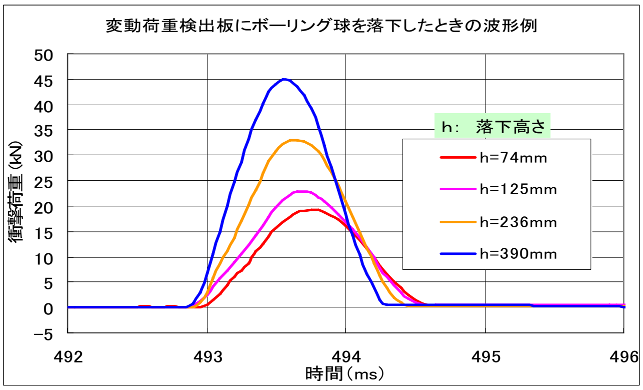

図２　ボーリング球の衝撃力の波形

落下高さ h=0.125m と 0.39m の場合について、理論的運動量、2×理論的運動量(=2m$V_0$)、および波形から計算した力積の総和を比較して表２に示します。

表２　ボーリング球の落下試験の結果

| 落下高さ（m） | 0.125 | 0.39 |
|---|---|---|
| ピーク衝撃力（kN） | 22.70 | 44.80 |
| 衝撃持続時間（msec） | 1.70 | 1.40 |
| 理論的運動量 m$V_0$(N･sec) | 10.80 | 19.08 |
| 2m$V_0$ | 21.60 | 38.15 |
| 力積の総和（N･sec） | 20.03 | 34.56 |

表 2 において、力積の総和は衝突時運動量を２倍した 2m$V_0$ より少し小さいですが ほぼ同じ程度になっています。

## 反発係数 e が 1>e>0 の例

190g の重さのソフトボールを変動荷重検出板に１m 高さから落下させたときの衝撃力の波形を図３に示します。ソフトボールは 0.4m 位跳ね返りました。

波形を見るとピーク荷重 1300N（133kgf）はボールの重さの 700 倍です。結果を表３にまとめています。衝撃持続時間は約 2.3 ミリ秒です。

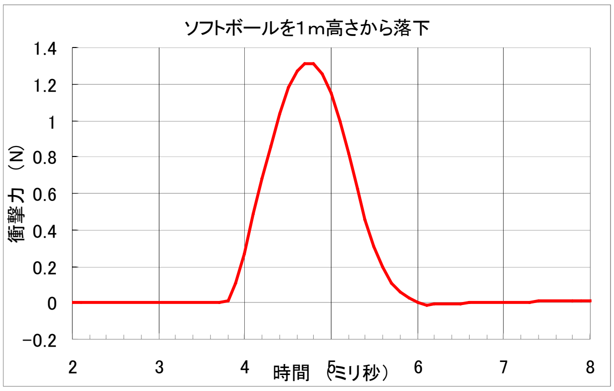


図３ ソフトボールを金属板に落下させたときの衝撃波形

表３　m(1+e)V と計測した力積の総和

| | |
|---|---|
| ソフトボール，質量　m（kg） | 0.19 |
| ピーク衝撃力 （N） | 1300 |
| 衝撃力持続時間 （ミリ秒） | 2.3 |
| 反発係数　e | 0.63 |
| 理論的運動量　mV （N･sec） | 0.841 |
| m(1+e)V　（N･sec） | 1.37 |
| 力積の総和　（N･sec） | 1.43 |

表３で跳ね返り率を 0.4 とすると反発係数は e=0.63、したがって、理論的運動量から m(1+e)V=1.37(N・sec)になります。一方、図３の波形の面積（力積の総和）を計算すると 1.43(N・sec)になり、力積の総和は予測より約 5%大きくなっています。